Bounded Analytic Functions on Riemann Surfaces

AUTHOR(S):
林, 実樹廣

数理解析研究所講究録
第 825 巻 1993 年 121-125

Bounded Analytic Functions on Riemann Surfaces

北大・理 (教養)　林　実樹廣
Hokkaido Univ.
Mikihiro HAYASHI

§1. 序.　Riemann 面 R上の有界解析関数全体のなす環 $H^\infty(R)$ で, bidisc $\mathbb{D}^2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ 上の有界解析関数全体 $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ と同型となり得ることを示した ([3]) が, このような例の存在により, リーマン面上の有界解析関数についての研究に新たな方向が見えてくる. この講演では, この新しい方向に向けて参考になりそうな問題を提起したい. 最初に, [3] の例はどこまで一般化できるのか興味がある. たとえば,

問題 1.　Wを $\mathbb{C}^n$ の任意の有界領域として, $H^\infty(W)$ と $H^\infty(R)$ が同型になるなるような Riemann 面は存在するか? 特に, Wが球体のときはどうか?

Riemann 面上の有界解析関数が多変数関数論と結びつきは, これまでにも ([1,2]) 多変数関数の理論を使って Riemann 面上の有界解析関数についての結果が得られたことから暗示されている. もし, この問題も前半が肯定的ならば, 有界解析関数については Riemann 面 (1 変数) と多変数の区別は一般論の範疇では全く便宜的なものになる.

§2. 高次元 resolution.　Vが n 次元 (連結) 複素多様体, $\mathcal{A}$ を V上の解析関数のなす環とする. V上の各点に対し $(f_1,\ldots,f_n)$ が局所座標系となるような元 $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{A}$ が存在するとき, 環 $\mathcal{A}$ は V上正則 **(regular)** であるということにする. また, 解析的に細い集合 Eがあって, $\mathcal{A}$ が $V\backslash E$の点を分離するとき, V上弱分離であるということにする. ここで, 部分集合 Eが解析的に細いとは, 局所的に非定数解析関数の零点集合に含まれることである.

定理 1. $\mathcal{A}$ が n 次元複素多様体 V 上の解析関数からなる環とし, V 上正則とする. このとき, 可算基をもつ n 次元複素多様体 $\widehat{V}$, $\widehat{V}$ 上の解析関数からなる環 $\widehat{\mathcal{A}}$, 及び, 解析写像 $\Phi : V \to \widehat{V}$ の組 $(\widehat{V}, \widehat{\mathcal{A}}, \Phi)$ で次の性質をもつ存在する:

(1) $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{A}} \circ \Phi$, i.e., $\mathcal{A} \cong \widehat{\mathcal{A}}$

(2) $\widehat{\mathcal{A}}$ は $\widehat{V}$ 上正則かつ弱分離である

(3) $\widehat{V}$ は次の意味で最大である; n 次元複素多様体 V', V' 上の解析関数からなる環 $\mathcal{A}'$ が V' 上正則, 解析写像 $\Phi' : V \to V'$ で $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \circ \Phi'$ となるものがあれば, 解析写像 $\Psi : V' \to \widehat{V}$ が存在して, $\Phi = \Psi \circ \Phi'$ が成り立つ. 更に, $\mathcal{A}'$ が V' 上弱分離ならば Ψ は単射である.

$(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{V})$ のことを $(\mathcal{A}, V)$ の正則 n 次元 resolution と呼ぶことにする

[略証]　証明のために, 一般に単位元をもつ (抽象代数的) 環 A を考える. 環 A から, n 次元複素多様体 U 上の解析関数からなるある環の上への同型写像 φ があるとき, $\varphi(f) = f^{\varphi}$ $(f \in A)$, $A^{\varphi} = \{f^{\varphi} : f \in A\}$ とおく. このとき, $f_1, \ldots, f_n \in A$ があって, Jacobian $J(f_1^{\varphi}, \ldots, f_n^{\varphi})$ が恒等的に零になっていないとき, (U, φ) を A の n 次元同型表現ということにする. 更に, A^{φ} が U 上正則 (resp. 弱分離) ならば, 同型表現 (U, φ) は正則 (**resp.** 弱分離) であるということにする.

環 A の n 次元正則同型表現 (U, φ) をとり, 各点 $p \in U$ に対し, 点 p の基本近傍系 $\{U_p\}$ を考え, これに包含関係による順序を入れる. この順序により環の帰納的極限

$$A_p^{\varphi} = \varinjlim_{U_p \downarrow p} A^{\varphi}|U_p$$

を考える. 簡単のため, $\widehat{p} = A_p^{\varphi}$ を置き, $\widehat{p}$ を点と思う. (W, ψ) を環 A の別の n 次元正則同型表現, $q \in W$ として, 点 $\widehat{p}$ と $\widehat{q}$ の同値関係を次により定める: p の近傍 U_p から q の近傍 W_q の

上への双解析写像$\Phi_{p,q}$があって,

$$q = \Phi_{p,q}(p) \quad \text{and} \quad f^{\psi} \circ \Phi_{p,q} = f^{\varphi} \quad (f \in A).$$

この同値関係による同値類全体を $Rep(A,n)$ とおくと, $Rep(A,n)$ には, 基本近傍系 $\{U_p\}$ の族全体から自然に位相が入り, (必ずしも連結でない)n 次元複素多様体となる. 各元 $f \in A$ は$\widehat{f}(\widehat{p}) = f^{\varphi}(p)$ により $Rep(A,n)$ 上の解析関数と考えられる.

ここで, 定理の証明に戻り, $A = \mathcal{A}$ とし, $U = V$, $\varphi = \mathrm{ident}$ と考えると自然な写像 $\Phi : V \to Rep(A,n)$ がある. そこで, $\widehat{V}$として$\Phi(V)$ を含む $Rep(A,p)$ の連結成分を考えればよい. また, $\widehat{\mathcal{A}} = \{\widehat{f}|\widehat{V} : f \in A\}$ とおくと, $\widehat{\mathcal{A}}$が$\widehat{V}$上, 正則かつ弱分離になることは, $Rep(A,n)$ の作り方から分かる.

また, $\widehat{V}$が可算基を持つことは Grauert の定理 (cf. [4]) から従う.

抽象環 A の正則弱分離な n 次元同型表現 (V,φ) があれば, それを含む最大の正則弱分離 n 次元同型表現 $(\widehat{V},\widehat{\varphi})$ を作れる. しかし, A の別の正則弱分離な n 次元同型表現 (W,ψ) があれば, それを含む最大の正則弱分離 n 次元同型表現 $(\widehat{W},\widehat{\psi})$ が作れる. つまり, 環を出発点とすると定理 1 を使って得られる n 次元同型表現 $(\widehat{V},\widehat{\varphi})$ は一般には単に極大であるに過ぎない. 実際, 冒頭で述べた bidisc の中の Riemann 面の例では, 次元 $n = 1$ として, $\widehat{V}$ と$\widehat{W}$とは複素多様体 (Riemann 面) として同型になるとは限らない.

しかしながら, この bidisc の例では, 同型表現の次元を上げて $n = 2$ とすると, 極大なものは bidisc 自身であり, 唯一つになる. そこで, 可能な限り同型表現の次元を上げることで同型問題が解ける可能性が残っている.

つまり, Riemann 面上の有界解析関数環 $H^{\infty}(R)$ についての同型問題は次の形に修正

して再度問うことができる:

問題 2. Rを Riemann 面として, $A = H^\infty(R)$ に対して, 極大な弱分離正則 n 次元同型表現 $(\widehat{V}^{(n)}, \widehat{\varphi}^{(n)})$ を考える. このとき, 次元 n について極大なものは存在するか? あればこれを Rの極大次元 resolution と呼ぼう. そのとき, 極大次元 resolution は同型を除き一意に決まるか?

現時点ではこの問題に対する答として, 様々な可能性が考えられる. たとえば, 否定的な方向として, 次元 n に最大なものがない, つまり, 無限の n に対して 極大な弱分離正則 n 次元同型表現 $(\widehat{V}^{(n)}, \widehat{\varphi}^{(n)})$ が存在する可能性もある. あるいは, 無限次元で最大のものが存在する可能性も考えられる.

この節で述べている事柄については Riemann 面に制限する必要はない. 一般の 解析空間, あるいは複素多様体 Vについて $A = H^\infty(V)$ として考えてもよい.

$H^\infty(V)$ について考えるなら, [1]の結果の多次元への一般化として, 次の問題が興味ある.

問題 3. Vの極大イデアル空間 $\mathcal{M}(V)$ への自然な埋め込みが開写像になるための条件を求めよ.

§3. 1 次元的であるための条件. Pole 集合 $\mathcal{P}(R)$ が空集合でなければ, 同型問題は肯定的に解ける. つまり,

定理 2. 2 つの Riemann 面 R, Wについて, $H^\infty(R) \cong H^\infty(W)$ とする. もし, $\mathcal{P}(R)$ が空集合でなければ, それぞれの Royden's resolution $\widetilde{R}$と$\widetilde{W}$は互いに等角同値である. このとき, $n \geq 2$ ならば $H^\infty(R)$ の n 次元同型表現 (V, φ) は存在しない.

この意味で, $\mathcal{P}(R) \neq \emptyset$ のとき Riemann 面 R は $H^\infty(R)$ に関して 1 次元的であるといえる. より一般に 1 次元的であることはどう定義できるか:

問題 4. R が $H^\infty(R)$ に関して 1 次元的であることの定義を与えよ. その定義のもとで, 同型問題は肯定的に解けるか? R の $\mathcal{M}(R)$ における様子は描けるか?

最後に, Pole 集合の中で二つの Riemann 面をつなぐ問題をあげておく.

問題 5. Riemann 面 R が Joradan 閉曲線 Γ により二つの領域 R_1, R_2 に分けられているとする. $R_i \cup \Gamma$ を含む領域 R_i' があって, $\Gamma \subset \mathcal{P}(R_1') \cap \mathcal{P}(R_2')$ となっていれば, $M^\infty(R) \neq \mathbb{C}$? また, $\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(R_1') \cup \mathcal{P}(R_2')$?

つなぎ目となる閉曲線 Γ が Pole 集合の中になければ, 反例が作れる. 従って, Pole 集合に関する条件は本質的と思われる. この問題が正しければ, $H^\infty(R)$ が Pole 集合に関する限り, ideal boundary の性質であることを意味しているように読める. これまで考えたいくつかの例からは, 答は肯定的に見える.

References

1. T. W. Gamelin and M. Hayashi, The algebra of bounded analytic functions on a Riemann surface, J. Reine Angew. Math. **382** (1987), 49-73.
2. M. Hayashi, The maximal ideal space of the bounded analytic functions on a Riemann suface, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), 337-344.
3. M. Hayashi, in preparation.
4. M. Jurchescu, On a theorem of Stoïlow, Math. Ann. **139** (1959), 332-334.